

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ  
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**1. Общие сведения**

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
3.	Направленность (профиль)	Управление данными и машинное обучение
4.	Дисциплина (модуль)	К.М.01.01 Дополнительные главы алгебры
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2021

**2. Перечень компетенций**

– <b>УК-2:</b> Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений
---

### 3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
Основные понятия алгебры	УК-2	основные понятия	доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме	навыками работы с многомерными векторами	Активность на занятиях: решение задач
Матрицы и определители	УК-2	основные понятия и алгоритмы работы с матрицами	доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме	придавать задачам конкретной предметной области математическую форму,	Активность на занятиях: решение задач
Системы линейных уравнений	УК-2	основные понятия и методы решения систем линейных уравнений	доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме	методом ортогонализации для решения геометрических задач	Активность на занятиях: решение задач Коллоквиум
Векторные пространства	УК-2	основные понятия и алгоритмы работы с векторами	применять теоретический материал,	навыками решения и исследования алгебраических уравнений	Активность на занятиях: решение задач
Многочлены	УК-2	основные понятия и алгоритмы работы с многочленами	творчески подходить к решению профессиональных задач,	навыками применения алгебраических методов к решению геометрических задач	Активность на занятиях: решение задач Коллоквиум
Основные понятия алгебры	УК-2	основные понятия	доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме	навыками работы с многомерными векторами	Активность на занятиях: решение задач

**Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:** «неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

#### 4. Критерии и шкалы оценивания

##### 1. Активность на занятиях: решение задач

- 20 баллов выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи.
- 16-19 баллов выставляется, если студент решил не менее 80% рекомендованных задач.
- 8-15 баллов выставляется, если студент решил не менее 40% рекомендованных задач.
- 0-7 баллов - если студент выполнил менее 40% задания.

##### 2. Коллоквиум

- 36-40 баллов выставляется, если студент ответил на все основные и дополнительные вопросы.
- 25-35 баллов выставляется, если студент ответил на все основные вопросы, но опустил некоторые важные детали.
- 14-24 балла выставляется, если студент ответил на половину вопросов.
- 0-13 баллов - если студент не ответил на вопросы или ответил частично.

#### 5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.

##### 5.1. Задания.

**Задача 1.** Найти размерность векторного пространства матриц размера  $3 \times 2$ .

**Задача 2.** Найти координаты вектора.  $a=(0,13,-5,8)$  в базисе  $e_1 = (-1,-1,-2,-3)$ ,  $e_2 = (-1,4,0,3)$ ,  $e_3 = (4,-3,-1,-1)$ ,  $e_4 = (1,1,-2,0)$ .

**Задача 3.** Определить, какие из систем векторов линейно зависимы, а какие - нет:

- а)  $a_1 = (1,-1,5,-4,-1)$ ,  $a_2 = (5,1,1,-4,-1)$ ,  $a_3 = (-3,0,-3,4,1)$ .  
б)  $a_1 = (-5,-1,-1,-1,-2)$ ,  $a_2 = (3,0,0,0,1)$ ,  $a_3 = (5,-1,1,2,0)$ ,  $a_4 = (-2,0,-1,-1,0)$ .  
в)  $a_1 = (-1,-2,4,2,1)$ ,  $a_2 = (0,-2,0,-1,-1)$ ,  $a_3 = (1,1,-5,-3,-1)$ .

**Задача 4.** Найти размерность линейной оболочки системы векторов  $a_1 = (-2, 2, 1, -2, -1, 0)$ ,  $a_2 = (-5, 5, 4, -4, -3, 2)$ ,  $a_3 = (-3, 3, 3, -2, -2, 2)$ ,  $a_4 = (-1, 1, -1, -2, 0, -2)$ .

**Задача 5.** Подпространство  $L$  пространства  $R^3$  определяется как множество всех векторов, параллельных плоскости  $x + y + z = 1$ . Найти базис и размерность  $L$ .

##### Задание 2.

**Задача 1.** Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

**Задача 2.** Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_5 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = -27 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 18 \end{cases}$$

**Задача 3.** Определить, является ли данная система линейных уравнений совместной.

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 = -10 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 + 2x_7 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_5 + x_6 = -4 \\ -x_1 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 4x_7 = 2 \\ x_1 - 4x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 3x_7 = -13 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 - 2x_6 + 4x_7 = 8 \\ -x_3 - x_4 - x_6 - x_7 = 2 \end{cases}$$

### Задание 3.

**Задача 1.** Пусть  $a = (-2, 2, 1, -2)$ ,  $b = (-5, -4, -3, 2)$ ,  $c = (-3, 2, 2, -2)$ .  
Вычислить  $(2a+3b, a+b-2c)$ .

**Задача 2.** Пусть  $a = (-1, 1, 1, -1)$ ,  $b = (-1, -1, 1, 1)$ ,  $c = (1, 2, 2, 1)$ ,  $d = (-4, 2, 2, -4)$ .  
Определить, какие пары этих векторов ортогональны.

**Задача 3.** С помощью процедуры ортогонализации найти ортогональный базис линейной оболочки векторов  $a_1 = (-2, -1, 0, -1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $a_3 = (-1, -2, 1, -1, 1)$ ,  $a_4 = (0, 2, 0, 1, 1)$ .

**Задача 4.** Найти координаты вектора  $a = (7/5, 26/5, -16/5, 12/5)$  в ортонормированном базисе  $e_1 = 1/5(1, 2, 2, 4)$ ,  $e_2 = 1/5(-4, -2, 2, 1)$ ,  $e_3 = 1/5(2, -4, -1, 2)$ ,  $e_4 = 1/5(2, -1, 4, -2)$ .

**Задача 5.** С помощью процедуры ортогонализации найти расстояние между параллельными прямыми в пространстве:

$$l_1: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+4}{-4} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-4}$$

**Задача 6.** С помощью процедуры ортогонализации найти расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве:

$$l_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{-4} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-3}{-2}$$

### Задание 4.

Используя возможности компьютерной алгебры решить задачи

**Задача 1.** Разделить с остатком многочлен  
 $f(x) = 6x^5 + 13x^4 + 14x^3 + 10x^2 + 5x + 2$  на  $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$

**Задача 2.** Найти НОД многочленов  
 $f(x) = x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 2$  и  $g(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$

**Задача 3.** Найти все рациональные корни многочлена  
 $f(x) = 6x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 7x^2 - 32x + 12$

**Задача 4.** Найти собственные числа матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

**Задача 5.** Найти ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму  $F(x, y, z) = 202x^2 + 125y^2 + 157z^2 - 36xy + 108xz - 24yz$  к диагональному виду.

## 5.2 Вопросы к коллоквиуму

### Вопросы к коллоквиуму 1.

1. Унарные и бинарные операции.
2. Группы. Аксиомы группы.
3. Группа подстановок. Число элементов. Произведение. Обратный элемент. Циклическая запись. Разложение в независимые циклы.
4. Группа подстановок. Транспозиции. Разложение в произведение транспозиций.

5. Группа подстановок. Инверсии. Четные и нечетные подстановки. Теорема о четности и нечетности.
6. Аксиомы кольца, ассоциативного кольца, коммутативного кольца, кольца с единицей, поля.
7. Матрицы. Сумма, произведение на число, произведение матриц. Кольцо матриц.
8. Определители и их основные свойства.
2. Определитель блочно-треугольной матрицы. Определитель произведения матриц.
3. Разложение определителя по строке и столбцу.
4. Обратная матрица. Формула. Критерий существования.
5. Системы линейных уравнений. Понятие частного решения и общего решения.
6. Крамеровские системы - решение  $n \times n$  с помощью обратной матрицы.
7. Крамеровские системы и формулы Крамера.
8. 15. Линейные пространства векторов плоскости и 3-х мерного пространства, строк, столбцов, матриц.
9. Линейные комбинации, линейная зависимость и независимость в векторных пространствах.
10. Критерий для определителя равенства нулю.

### Вопросы к коллоквиуму 2.

1. Билинейные и квадратичные формы. Матричная запись и запись через скалярное произведение.
2. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
3. Скалярное произведение, соответствующее положительно определенной квадратичной форме.
4. Кольцо многочленов  $P[x]$  над полем  $P$ .
5. Деление многочленов. Неприводимые многочлены.
6. Схема Горнера.
7. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
8. Свойства НОД.
9. Разложимость многочленов на простые множители.
11. Рациональные корни целочисленных многочленов.
12. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
13. Свойства многочленов над полем вещественных чисел.
14. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования в данном базисе.
15. Матрица перехода от базиса к базису. Матрицы линейного преобразования в разных базисах.
16. Ортогональные преобразования и матрицы. Критерий ортогональности матрицы.
17. Собственные вектора и собственные значения линейных преобразований и матриц. Алгоритм поиска.
18. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

### 5.3 Вопросы к экзамену

1. Поля. Аксиомы поля.
2. Характеристика поля. Поле вычетов по простому модулю.
3. Векторные пространства. Аксиомы.
4. Линейная зависимость и независимость.
5. Линейная зависимость в  $E^2$  и в  $E^3$ .
6. Лемма о замене.
7. Базис и размерность векторного пространства.
8. Теорема о базисе.
9. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфизм пространств одной размерности.
10. Линейные подпространства. Линейная оболочка
11. Линейные многообразия. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия.
12. Общее решение однородной системы линейных уравнений. Его размерность. Фундаментальная
13. Поля. Характеристика поля. Отсутствие делителей нуля. Поля вычетов.
14. Векторные пространства. Аксиомы.
15. Линейная зависимость и независимость в векторных пространствах. Свойства линейной независимости.
16. Лемма о замене.
17. Базис и размерность векторного пространства. Теорема о базисе.
18. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфизм пространств одной размерности.
19. Линейные подпространства и линейные многообразия.
20. Размерность общего решения однородной системы линейных уравнений.
21. Теорема об общем решении неоднородной системы линейных уравнений.
22. Евклидовы пространства. Аксиомы.
23. Свойства ортогональных и ортонормированных систем векторов в Евклидовых пространствах.
24. Процедура ортогонализации и ортогональные базисы в Евклидовых пространствах.
25. Ортонормированный базис. Теорема об изоморфизме Евклидовых пространств.
26. Положительно определенные квадратичные формы. Скалярное произведение, соответствующее положительно определенной квадратичной форме.

27. Теорема о делении многочленов в кольце  $\mathbb{P}[x]$  над полем  $\mathbb{P}$ .
28. Схема Горнера.
29. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
30. Основные свойства НОД.
31. Разложимость многочленов на простые множители.
32. Рациональные корни целочисленных многочленов.
33. Многочлены над полем вещественных чисел.
34. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования в данном базисе. Матрица перехода от базиса к базису. Матрицы линейного преобразования в разных базисах.
35. Ортогональные преобразования и матрицы. Критерий ортогональности матрицы.
36. Собственные вектора и собственные значения линейных преобразований и матриц. Характеристический многочлен матрицы.
37. Ортонормированный базис из собственных векторов симметрического преобразования.
38. Замена переменных в квадратичной форме. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.